composition de mathématiques appliquées

Durée : 6 heures

ANALYSE NUMÉRIQUE

Approximations d'un système d'équations différentielles aux limites

Dans le problème nous allons étudier l'existence et l'approximation de la solution d'un système d'équations différentielles aux limites d'ordre 2 dépendant d'un paramètre, noté λ. Comme le cas $\lambda >> 1$ nous intéresse, il est important d'obtenir des majorations des solutions exactes et approchées qui soient indépendantes de λ.

Nous nous intéressons au problème suivant, noté (P_0) : trouver 2 fonctions $\theta, \omega : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ satisfaisant au système

$$(P_0) \qquad \begin{cases} -\dfrac{d^2}{dt^2}\theta + \lambda(\theta - \dfrac{d}{dt}\omega) &= 0 \quad \text{dans }]0,1[, \\ \lambda\dfrac{d}{dt}(\theta - \dfrac{d}{dt}\omega) &= G \quad \text{dans }]0,1[, \\ \theta(0) = \theta(1) = \omega(0) = \omega(1) &= 0, \end{cases}$$

où λ, $\lambda \geq 1$, est un paramètre indépendant de t, (qui peut être *grand*) et où G est une fonction définie sur $(0,1)$ de carré intégrable.

La première partie du travail est consacrée à l'étude des espaces fonctionnels utilisés dans la résolution du problème considéré. Certains résultats sont classiques mais lorsqu'on en demande une démonstration, il faut utiliser la démarche proposée, aucune autre démonstration ne sera prise en considération. La deuxième partie étudie l'approximation des fonctions introduites dans la partie I. La partie III est consacrée à l'étude théorique du problème tandis que les parties IV et V concernent des approximations du problème.

Partie I. Préambule

L'étude du problème fait intervenir des espaces fonctionnels construits sur $L^2(I)$, espace des classes de fonctions numériques de carré intégrable sur I, $I \subset \mathbf{R}$ intervalle ouvert. Si l'intervalle I est d'extrémités a et b on le note (a,b) et $[a,b]$ ou $\overline{I}$ son adhérence. Selon l'usage on représente un élément de $L^2(I)$, donc une classe de fonctions, par un élément de cette classe. Deux représentants d'une même classe diffèrent donc sur un ensemble de mesure nulle (au sens de Lebesgue) ou encore sont égaux presque partout (*p.p.*). On dit que $u \in L^2(I)$ est $C^k(I)$ (respectivement $C^k(\overline{I})$) s'il existe un élément de la classe de u qui est une fonction k fois continûment différentiable sur I (respectivement $\overline{I}$) et dans ce cas on désigne par u ce représentant $C^k(I)$ (respectivement $C^k(\overline{I})$).

Muni du produit scalaire $(.,.)_{L^2(I)}$, $(I = (a,b))$,

$$(u,v)_{L^2(I)} = \int_a^b u(x)v(x)\,dx,$$

et de la norme induite $\|.\|_{L^2(I)}$, l'espace $L^2(I)$ est un espace de Hilbert.

On dit que $u \in L^2(I)$ admet une dérivée généralisée s'il existe $v \in L^2(I)$ tel que

$$(E_1) \qquad u(x) - u(y) = \int_y^x v(t)\,dt \qquad p.p. \text{ en } x, y \in I.$$

On montre facilement qu'un tel v, s'il existe, est unique *p.p.* Si (E_1) est réalisé, on peut alors parler de la dérivée généralisée v de u que l'on note u'.

On désigne par $H^1(I)$ l'espace des fonctions de $L^2(I)$ admettant une dérivée généralisée.

1I/ Montrer que si u est dans $H^1(I)$ et que I est borné, alors u appartient à $C^0(\overline{I})$. □

En conséquence si u appartient à $H^1(I)$ et I est borné, alors

$$u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t)\,dt \qquad \text{pour tout } x, y \in \overline{I}.$$

2I/ Montrer que si u est dans $H^1(a,b)$ avec $u(a) = u(b) = 0$, alors le prolongement sur $\mathbf{R}$ de u par 0 est un élément de $H^1(\mathbf{R})$. □

3I/ Montrer que pour $u, v \in H^1(I)$,

$$\int_y^x uv'\,dt = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x u'v\,dt \qquad \text{pour tout } x, y \in I. \quad \square$$

4I/ On veut montrer que si les fonctions $u, v \in L^2(I)$ sont telles que

$$\int_I u\varphi'\,dt = -\int_I v\varphi\,dt \qquad \text{pour tout } \varphi \in C_c^\infty(I),$$

où $C_c^\infty(I)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans I, alors u appartient à $H^1(I)$ et v est la dérivée généralisée de u. Pour cela on montrera la relation (E_I) en approchant la fonction indicatrice de l'intervalle $(x, y) \subset I$ par une suite de fonctions $C_c^\infty(I)$ construites par convolution avec une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ où

$$f_n(x) = nf(nx) \quad \text{avec } f \in C_c^\infty(-1,1),\ f \geq 0,\ \textstyle\int_{-1}^1 f\,dt = 1. \quad \square$$

On vérifie facilement que $H^1(I)$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ et que l'application $(.,.)_{H^1(I)}$: $H^1(I) \times H^1(I) \to \mathbf{R}$ donnée par

$$(u, v)_{H^1(I)} = (u, v)_{L^2(I)} + (u', v')_{L^2(I)}$$

est un produit scalaire qui induit sur $H^1(I)$ une structure d'espace de Hilbert. Dans la suite on considère $H^1(I)$ comme étant muni de cette structure topologique.

5I/ Montrer que si la fonction u est dans $H^1(I)$, alors

$$\sup_{x\in I} u^2(x) \leq 2\|u\|_{L^2(I)}\|u'\|_{L^2(I)} + \frac{1}{|I|}\|u\|^2_{L^2(I)},$$

$|I|$ désignant la longueur de I, avec $1/|I| = 0$ si I est non borné. □

On définit l'espace de fonctions

$$H_0^1(a,b) = \{u \in H^1(a,b);\, u(a) = u(b) = 0\},$$

muni de la topologie induite par celle de $H^1(a,b)$. On démontre que $H_0^1(a,b)$ est l'adhérence de $C_c^\infty(a,b)$, résultat que l'on admettra.

6I/ Nous supposons que l'intervalle I est borné. Vérifier que l'application $(.,.)_{H_0^1(I)} : H_0^1(I) \times H_0^1(I) \to \mathbf{R}$ donnée par

$$(u, v)_{H_0^1(I)} = (u', v')_{L^2(I)}$$

est un produit scalaire qui induit sur $H_0^1(I)$ une norme $\|.\|_{H_0^1(I)}$ équivalente à la norme $\|.\|_{H^1(I)}$. □

Pour tout entier $m \geq 2$, on définit alors par récurrence l'espace

$$H^m(I) = \{v \in H^{m-1}(I);\, v' \in H^{m-1}(I)\}.$$

On introduit la notation d^ℓ pour la dérivée généralisée d'ordre ℓ ; pour $u \in H^m(I)$ nous avons

$$d^0u = u \quad \text{et} \quad d^\ell v = (d^{\ell-1}v)' \quad \text{pour } \ell = 1, \ldots, m.$$

Nous munissons $H^m(I)$ du produit scalaire $(.,.)_{H^m(I)}$ donné par

$$(u, v)_{H^m(I)} = \sum_{\ell=0}^{m} (d^\ell u, d^\ell v)_{L^2(I)}.$$

Le produit scalaire $(.,.)_{H^m(I)}$ induit la norme $\|.\|_{H^m(I)}$ sur $H^m(I)$. Par convention on notera aussi $H^0(I) = L^2(I)$.

Partie II. Approximation polynomiale.

Nous allons étudier l'approximation polynomiale de fonctions appartenant aux espaces précédemment introduits. Nous ferons usage de la notation $f_{|(a,b)}$ pour la restriction de f sur l'intervalle (a,b).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $h = 1/n$ et $\{x_0, \ldots, x_n\}$ la partition régulière de $(0,1)$ donnée par $x_i = ih$. Associés à ces partitions nous définissons les espaces pour $r \geq 1$

$$W_h^r = \{w_h \in C^0[0,1]; w_{h|(x_{i-1},x_i)} \in \mathscr{P}^r\},$$
$$W_{h,0}^r = W_h^r \cap H_0^1(0,1),$$

où $\mathscr{P}^r$ désigne l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à r.

1II/ Démontrer que W_h^r, $W_{h,0}^r$ sont des espaces vectoriels inclus dans $H^1(0,1)$. Donner en le justifiant la dimension de ces espaces. □

2II/ Pour $u \in H^1(0,1)$, on considère le problème

$$\min_{q \in \mathscr{P}^r} (\|u' - q'\|_{L^2(0,1)}).$$

Montrer que ce problème admet au moins une solution et que $q_* \in \mathscr{P}^r$ est solution si et seulement si

$$\int_0^1 (u - q_*)' q' \, dt = 0 \qquad \forall q \in \mathscr{P}^r. \quad \square$$

3II/ Vérifier que pour toute fonction $u \in H^1(0,1)$, il existe un élément et un seul $R_{r,h}u \in W_h^r$ tel que

$$\forall i = 0, \ldots, n, \quad (u - R_{r,h}u)(x_i) = 0,$$
$$\forall i = 1, \ldots, n, \quad \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u - R_{r,h}u)' q' \, dx = 0 \qquad \forall q \in \mathscr{P}^r.$$

Démontrer que

$$\forall\, i = 1, \ldots, n, \text{ et } \forall\, q \in \mathscr{P}^r \qquad \|(u - R_{r,h}u)'\|_{L^2(x_{i-1},x_i)} \leq \|(u - q)'\|_{L^2(x_{i-1},x_i)}. \quad \square$$

4II/ En suivant les indications démontrer qu'il existe des constantes $C_i > 0$, $i = 1,2,3$ (ne dépendant ni de h ni de u) telles que pour tout $u \in H^{r+1}(0,1)$,

$$\|u - R_{r,h}u\|_{L^2(0,1)} \leq C_1 h^{r+1} \|d^{r+1}u\|_{L^2(0,1)},$$
$$\|u - R_{r,h}u\|_{H^1(0,1)} \leq C_2 h^r \|d^{r+1}u\|_{L^2(0,1)}.$$

Pour cela, on montrera d'abord que

$$\|u - R_{r,h}u\|^2_{L^2(0,1)} \leq C_3 h^2 \|(u - R_{r,h}u)'\|^2_{L^2(0,1)}$$

puis on choisira convenablement q dans l'inégalité démontrée à la question 3II/. □

5II/ En déduire que pour toute fonction $u \in H^{r+1}(0,1)$, il existe un élément $\mathscr{I}_{r,h}u \in W_h^r$ tel que

$$(R_{\mathrm{II}}) \qquad \begin{cases} \|u - \mathscr{I}_{r,h}u\|_{L^2(0,1)} \leq C_4 h^{r+1} \|d^{r+1}u\|_{L^2(0,1)}, \\ \|u - \mathscr{I}_{r,h}u\|_{H^1(0,1)} \leq C_5 h^r \|d^{r+1}u\|_{L^2(0,1)}, \\ \displaystyle\int_0^1 (u - \mathscr{I}_{r,h}u)\, dx = 0, \end{cases}$$

où C_4 et C_5 ne dépendent ni de h, ni de u. Démontrer que pour $u \in H^{r+1}(0,1) \cap H_0^1(0,1)$, on peut construire $\mathscr{I}_{r,h}u \in W_{h,0}^r$ satisfaisant aux relations (R_{II}). □

Partie III. Étude du problème (P_0)

Nous présentons maintenant le cadre pour l'étude du problème (P_0). L'espace $V = H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1)$ est muni de la norme

$$\|\varphi, \psi\|_V = \left(\|\varphi'\|^2_{L^2(0,1)} + \|\psi'\|^2_{L^2(0,1)}\right)^{1/2}.$$

Nous définissons la forme bilinéaire $b_\lambda : V \times V \to \mathbf{R}$ par

$$b_\lambda(\theta,\omega;\varphi,\psi) = (\theta',\varphi')_{L^2(0,1)} + \lambda(\theta-\omega',\varphi-\psi')_{L^2(0,1)}.$$

1III/ Vérifier que $b_\lambda(.;.)$ est un produit scalaire sur V et que pour $(\theta,\omega) \in V$

$$\|\theta,\omega\|_V^2 \le 3\|\theta,\omega\|_\lambda^2 \le 3(1+2\lambda)\|\theta,\omega\|_V^2,$$

où $\|.\|_\lambda$ est la norme associée au produit scalaire $b_\lambda(.,.)$. □
2III/ Si les fonctions $\theta,\omega \in C^2(0,1)\cap C^0[0,1]$ satisfont au problème (P_0), vérifier que

$$\forall(\varphi,\psi)\in V \qquad b_\lambda(\theta,\omega;\varphi,\psi) = (G,\psi)_{L^2(0,1)}. \quad \square$$

Il est dès lors naturel de s'intéresser au problème, noté $(P_{\rm III})$: trouver des fonctions $(\theta,\omega)\in V$ telles que

$$(P_{\rm III}) \qquad \forall(\varphi,\psi)\in V \qquad b_\lambda(\theta,\omega;\varphi,\psi) = (G,\psi)_{L^2(0,1)}.$$

3III/ Démontrer que le problème $(P_{\rm III})$ possède une solution unique (θ,ω) et qu'il existe C indépendant de λ tel que

$$\|\theta\|_{H^1(0,1)} + \|\omega\|_{H^1(0,1)} + \lambda\|\theta-\omega'\|_{L^2(0,1)} \le C\|G\|_{L^2(0,1)}. \quad \square$$

4III/ Si de plus la fonction G est continue sur $(0,1)$, montrer que les fonctions θ, ω sont dans $C^2(0,1)\cap C^0[0,1]$ et satisfont au problème (P_0). □
5III/ Montrer que si la fonction G appartient à $H^{m-1}(0,1)$, alors la fonction θ est dans $H^{m+2}(0,1)$, la fonction ω est dans $H^{m+1}(0,1)$ et il existe C ne dépendant que de $m \ge 1$ tel que

$$\|\theta\|_{H^{m+2}(0,1)} + \|\omega\|_{H^{m+1}(0,1)} + \lambda\|\theta-\omega'\|_{H^m(0,1)} \le C\|G\|_{H^{m-1}(0,1)}. \quad \square$$

Partie IV. Première approximation du problème (P_0)

Nous allons étudier maintenant une première discrétisation du problème $(P_{\rm III})$ (ou (P_0)). Le problème approché, noté $(P_{\rm IV})$, consiste à trouver des fonctions $(\theta_h,\omega_h)\in V_h^r \equiv W_{h,0}^r \times W_{h,0}^r$ telles que

$$(P_{\rm IV}) \qquad \forall(\varphi,\psi)\in V_h^r \qquad b_\lambda(\theta_h,\omega_h;\varphi,\psi) = (G,\psi)_{L^2(0,1)},$$

où la fonction G appartient à $H^{r-1}(0,1)$ et l'espace $W_{h,0}^r$ a été défini à la partie II.
1IV/ Démontrer que le problème $(P_{\rm IV})$ possède une solution unique et vérifier l'estimation suivante

$$\forall(\tilde\theta,\tilde\omega)\in V_h^r \qquad \|\theta-\theta_h,\omega-\omega_h\|_\lambda \le \|\theta-\tilde\theta,\omega-\tilde\omega\|_\lambda,$$

où $(\theta,\omega)\in V$ est la solution du problème $(P_{\rm III})$ et $(\theta_h,\omega_h)\in V_h^r$ la solution du problème $(P_{\rm IV})$. □

Dans les questions 2IV/ et 3IV/ ci-après, $(\theta,\omega)\in V$ est la solution de $(P_{\rm III})$ et $(\theta_h,\omega_h)\in V_h^r$ la solution de $(P_{\rm IV})$.
2IV/ En utilisant la propriété de minimisation vérifiée en 1IV/ établir l'estimation

$$\|\theta'-\theta_h'\|_{L^2(0,1)} + \|\omega'-\omega_h'\|_{L^2(0,1)} \le C\sqrt{\lambda}h^r\|G\|_{H^{r-1}(0,1)},$$

où C ne dépend que de r (et pas de λ ou h). □
3IV/ De même établir l'estimation

$$\|\theta'-\theta_h'\|_{L^2(0,1)} + \|\omega'-\omega_h'\|_{L^2(0,1)} \le Ch^{r-1}\|G\|_{H^{r-1}(0,1)},$$

où C ne dépend que de r (et pas de λ ou h). □

Les estimations ci-dessus ne donnent pas des taux optimaux de convergence uniforme en λ. En particulier pour des approximations polynomiales de degré 1, nous n'avons pas la convergence uniforme en λ. Nous verrons dans la partie suivante du travail comment une *légère* modification du schéma d'approximation va donner des estimations optimales uniformes en λ.

Partie V. Seconde approximation du problème (P_0)

V.I. Préliminaires

Relativement à la partition régulière de $(0,1)$, donnée par $x_i = ih$, $h = 1/n$, $i = 0, \dots, n$, on définit l'espace U_h^r des fonctions dont la restriction sur chaque intervalle (x_i, x_{i+1}) est polynomiale de degré $r-1$.

Pour $f \in U_h^\ell$, $\ell \in \mathbf{N}$, on obtient une formule de quadrature pour le calcul approché de $\int_0^1 f(x)\,dx$ en écrivant l'intégrale comme somme des $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$, $i = 0, \dots, n-1$, et en remplaçant cette dernière intégrale par une formule de quadrature de type Gauss à r points. On obtient ainsi une expression de la forme $\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{r} f(\xi_{i,k}) W_{i,k}$, notée $S(f,r)$ et dite formule de quadrature d'ordre r. Les quantités $W_{i,k}$ ne dépendent que de x_i, x_{i+1} et r ainsi que les $\xi_{i,k}$. De plus pour k variant de 1 à r, les points $\xi_{i,k}$, appelés points de Gauss, appartiennent à (x_i, x_{i+1}). Cette formule de quadrature est exacte pour les fonctions dans l'espace U_h^{2r}.

1V/ Pour $f \in L^2(0,1)$, on désigne par $\Pi_k f$ la projection de f (au sens du produit scalaire usuel de $L^2(0,1)$) sur U_h^k. Montrer que si la fonction f est dans U_h^{r+1}, alors $\Pi_r f$ est égale à la fonction de U_h^r qui interpole f aux points de Gauss dans la formule de quadrature d'ordre r. □

2V/ En déduire que pour f et g dans U_h^{r+1}

$$S(fg, r) = \int_0^1 (\Pi_r f) g\,dx. \quad \square$$

Nous considérons le problème, noté (P_V) : trouver des fonctions $(\theta_h, \omega_h) \in V_h^r$ et $\eta_h \in U_h^r$ telles que

$$(P_V) \qquad \begin{cases} \forall (\varphi, \psi) \in V_h^r & \int_0^1 \theta_h' \varphi'\,dx + \int_0^1 \eta_h(\varphi - \psi')\,dx = \int_0^1 G\psi\,dx, \\ \forall \kappa \in U_h^r & \int_0^1 (\theta_h - \omega_h')\kappa\,dx - \lambda^{-1} \int_0^1 \eta_h \kappa\,dx = 0. \end{cases}$$

3V/ Vérifier que le problème (P_V) est équivalent au problème (P_{IV}) lorsque nous remplaçons l'intégrale $(\theta_h - \omega_h', \varphi - \psi')_{L^2(0,1)}$ par la formule de quadrature $S((\theta_h - \omega_h')(\varphi - \psi'), r)$, introduite ci-dessus. □

Dans la suite du travail nous allons étudier le problème (P_V). On peut penser que ce dernier schéma est moins bon que le schéma initial (à cause de l'intégration numérique). En fait on montrera qu'au contraire le nouveau schéma est meilleur que le schéma initial.

Pour l'analyse du problème (P_V), il est commode d'utiliser les résultats de calcul matriciel qui font l'objet de la section V.II.

V.II. Résultats de calcul matriciel

Nous introduisons d'abord quelques notations.

- B étant une matrice à coefficients réels, on désigne par ${}^tB$ la transposée de B.
- (a, b) désigne le produit scalaire euclidien des deux vecteurs a et b de $\mathbf{R}^N$, $||a||$ la norme associée.
- On utilise l'écriture matricielle *par blocs*. Dans cette écriture, le *bloc* 0 désigne la matrice nulle.

Nous partons du système linéaire, noté (S_V), dépendant du paramètre λ

$$(S_V) \qquad \begin{pmatrix} A & {}^tB \\ B & -\lambda^{-1} D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

où les données sont $A \in \mathsf{M}_{NA \times NA}(\mathbf{R})$, $B \in \mathsf{M}_{ND \times NA}(\mathbf{R})$, $D \in \mathsf{M}_{ND \times ND}(\mathbf{R})$, $f_1 \in \mathbf{R}^{NA}$ et $f_2 \in \mathbf{R}^{ND}$. Le paramètre réel λ est supérieur ou égal à 1.

Nous supposons que les données satisfont aux propriétés suivantes :

(a) A est symétrique, semi-définie positive et définie positive sur le noyau de B, c'est-à-dire $(Au, u) \geq 0$ (et > 0) pour tout $u \in \mathbf{R}^{NA}$ (et $u \in \mathrm{Ker}B \backslash \{0\}$),

(b) le noyau de ${}^tB$ est réduit à $\{0\}$,

(c) D est symétrique définie positive.

On veut montrer que le système (S_V) admet une solution unique dont la norme euclidienne peut être majorée indépendamment de λ par des quantités ne faisant intervenir que les données.

4V/ En utilisant une base orthonormée de $\mathbf{R}^{NA}$ qui complète une base de $\mathrm{Ker}B$, montrer que le système (S_V) est équivalent à un système, noté (S_{VI}), du type

$$\begin{pmatrix} A_1 & {}^tA_2 & 0 \\ A_2 & A_3 & {}^tB_1 \\ 0 & B_1 & -\lambda^{-1} D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$$

avec $A_1 \in \mathsf{M}_{NA_1 \times NA_1}(\mathbf{R})$ symétrique, définie positive, $A_3 \in \mathsf{M}_{ND\times ND}(\mathbf{R})$, $B_1 \in \mathsf{M}_{ND\times ND}(\mathbf{R})$ inversible, D la matrice apparaissant dans (S_V) et $(A_3 - A_2 A_1^{-1}{}^t A_2)$ symétrique semi-définie positive. Montrer que le système (S_{VI}) admet une solution unique dont la norme euclidienne se majore indépendamment de λ par les normes des données. □

5V/ Nous supposons maintenant que la matrice B satisfait à la propriété suivante : il existe $\beta > 0$ tel que

$$\forall u_2 \in \mathbf{R}^{ND} \qquad \sup_{u_1 \in \mathbf{R}^{NA}, u_1 \neq 0} \frac{{}^t u_2 B u_1}{\|u_1\|} \geq \beta \|u_2\|.$$

Vérifier qu'alors ${}^tB$ est injective et que si B_1 est une sous-matrice inversible de B, alors la norme subordonnée à la norme euclidienne de ${}^tB_1^{-1}$ est majorée par β^{-1}. □

V.III. Étude du problème (P_V)

6V/ On se fixe h. On résoud le problème approché (P_V) en prenant une base dans les espaces $W_{h,0}^r$ et U_h^r. Montrer que résoudre le problème approché (P_V) revient à résoudre un système matriciel (S_V) étudié précédemment. Vérifier les hypothèses (a), (b) et (c) introduites pour étudier (S_V). Pour étudier le noyau de B, on montrera en particulier que pour un élément de ce noyau on peut construire un élément $(\theta, \omega) \in V_h^r$ tel que ω' soit la projection de θ sur U_h^r au sens du produit scalaire de $L^2(0,1)$. En déduire alors que $(Au, u) > 0$ pour tout $u \in \mathrm{Ker}B \backslash \{0\}$. □

7V/ Vérifier que le problème (P_V) possède une solution $(\theta_h, \omega_h) \in V_h^r$, $\eta_h \in U_h^r$ unique et qu'il existe C ne dépendant ni de h, ni de λ tel que

$$\|\theta_h'\|_{L^2(0,1)} + \|\omega_h'\|_{L^2(0,1)} + \|\eta_h\|_{L^2(0,1)} \leq C\|G\|_{L^2(0,1)}. \quad \square$$

8V/ Soit $(\theta, \omega) \in V$ la solution de (P_{III}), $\eta = \lambda(\theta - \omega') \in L^2(0,1)$ et $(\theta_h, \omega_h) \in V_h^r$, $\eta_h \in U_h^r$ la solution du problème (P_V). Vérifier qu'il existe $C > 0$ ne dépendant ni de h, ni de λ tel que

$$\|\theta' - \theta_h'\|_{L^2(0,1)} + \|\omega' - \omega_h'\|_{L^2(0,1)} + \|\eta - \eta_h\|_{L^2(0,1)}$$
$$\leq C \inf_{(\tilde\theta,\tilde\omega)\in V_h^r, \tilde\eta \in U_h^r} \left[\|\theta' - \tilde\theta'\|_{L^2(0,1)} + \|\omega' - \tilde\omega'\|_{L^2(0,1)} + \|\eta - \tilde\eta\|_{L^2(0,1)}\right]. \quad \square$$

9V/ Déduire du point 8V/ précédent qu'il existe C ne dépendant ni de h et ni de λ tel que

$$\|\theta - \theta_h\|_{L^2(0,1)} + \|\omega - \omega_h\|_{L^2(0,1)} + h(\|\theta' - \theta_h'\|_{L^2(0,1)} + \|\omega' - \omega_h'\|_{L^2(0,1)}) \leq Ch^{r+1}\|G\|_{H^{r-1}(0,1)}. \quad \square$$

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Dans tout le problème, $\mathbb{R}^n$ désignera indifféremment un espace vectoriel ou affine, muni de sa structure euclidienne canonique et orienté par sa base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. En pratique dans le problème n vaudra 2 ou 3.

Rappel

Dans $\mathbb{R}^3$, on appelle système de <u>coordonnées cylindriques</u> d'un point M relativement au repère orthonormé direct (C, u_1, u_2, u_3) tout triplet (r, θ, z) tel que : $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $\overrightarrow{CM} = r\cos\theta\, u_1 + r\sin\theta\, u_2 + z\, u_3$. Si $r \neq 0$, <u>la base locale</u> au point M est (u_r, u_θ, u_z) où $u_r = \cos\theta\, u_1 + \sin\theta\, u_2$, $u_z = u_3$ et $u_\theta = u_z \wedge u_r$.

Préliminaires algébriques

On note O_3 le groupe orthogonal de $\mathbb{R}^3$, et $\mathcal{L}_3$ l'espace des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$. Ces préliminaires étudient les applications linéaires de $\mathcal{L}_3$ dans lui-même possédant certaines propriétés d'invariance. Les résultats seront utilisés en partie III.

Pour tout f de $\mathcal{L}_3$, on notera ${}^t f \in \mathcal{L}_3$, l'unique endomorphisme vérifiant:

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \forall y \in \mathbb{R}^3,\quad f(x)\cdot y = x\cdot {}^t f(y)$$

Une application linéaire K de $\mathcal{L}_3$ dans lui-même sera dite <u>indifférente</u> si pour tout élément f de $\mathcal{L}_3$ et pour tout p de O_3 on a :

$$K({}^t p\ f\ p) = {}^t p\ K(f)\ p$$

(en notant la composition des applications comme un produit).

On pourra dans les questions qui suivent utiliser les symétries orthogonales en adoptant les notations suivantes : pour tout vecteur non nul x de $\mathbb{R}^3$, s_x sera la symétrie orthogonale par rapport à l'orthogonal $\{x\}^\perp$ de x ; si x et y sont deux vecteurs formant un système libre de $\mathbb{R}^3$, s_{xy} sera la symétrie orthogonale par rapport au plan de base $(x+y,\ x\wedge y)$.

Dans cette partie K désignera une application linéaire indifférente.

1. On pose $\mathcal{F} = \{\ f \in \mathcal{L}_3\ /\ \forall\ p \in O_3\ ,\ {}^t p\ f\ p = f\ \}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est la droite vectorielle engendrée par l'endomorphisme identité $\mathbb{I}$.

2. Montrer que $\mathbb{I}$ est un vecteur propre de K. On appelle $\alpha_{\mathbb{I}}$ la valeur propre correspondante.

3. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B} = (y_1, y_2, y_3)$. Soit $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}$ l'espace des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ admettant $\mathcal{B}$ comme base de vecteurs propres.

3.a. Montrer que $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}$ est un espace de dimension 3, stable par K.

3.b. En déduire que l'espace $\mathcal{S}$ des endomorphismes symétriques de $\mathbb{R}^3$ est également stable par K.

4. Soit $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$, l'espace des endomorphismes appartenant à $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}$ dont la trace est nulle. On note f et g les éléments de $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ admettant respectivement (0,1,-1) et (1,0,-1) comme valeurs propres relativement aux vecteurs propres (y_1, y_2, y_3).

4.a. Montrer que (f,g) est une base de $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ et que $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}$ est somme directe de $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ et $\mathcal{F}$.

4.b. Montrer que f et g sont des vecteurs propres pour K associés à la même valeur propre, que l'on notera α.

5. Soit $\mathcal{S}_0$ l'espace des endomorphismes symétriques de trace nulle. Montrer que $\mathcal{S}$ est la somme directe de $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{F}$, et que $\mathcal{S}_0$ est le sous-espace propre de la restriction de K à $\mathcal{S}$, associé à la valeur propre α. $(\text{si } \alpha \neq \alpha_{\mathbb{I}})$

6. Montrer qu'il existe un unique couple de réels (a,b) tel que, pour tout endomorphisme symétrique f :

$$K(f) = a\, f + b\, \mathrm{trf}\, \mathbb{I}$$

où trf désigne la trace de f.

Si de plus α et $\alpha_{\mathbb{I}}$ sont strictement positifs, montrer qu'il existe un unique couple de réels (E,ν), $E > 0$, $\nu > -1$, tel que :

$$a = \frac{1+\nu}{E}\ ,\ b = -\frac{\nu}{E}\ .$$

Première partie

$\mathcal{R}_0$ est le repère fixe (O,e_1,e_2,e_3). Le champ de pesanteur est défini par $\vec{g} = g\, e_1$ $(g > 0)$.

On considère un solide $\mathcal{S}$ admettant un plan de symétrie (Π). Le solide $\mathcal{S}$ est constitué d'un réservoir sphérique $\mathcal{S}_1$ et d'une portion de cylindre $\mathcal{C}$ liés rigidement par une tige $\mathcal{T}$.

. Le réservoir $\mathcal{S}_1$ est l'ensemble des points dont la distance à un point fixe C_1 de (Π) est comprise entre R_i et R_e $(R_i < R_e)$.

. La portion de cylindre $\mathcal{C}$ est définie en coordonnées cylindriques dans un repère orthornormé direct $\mathcal{R}\,(C,X_1,X_2,X_3)$ lié à $\mathcal{S}$ et tel que (C,X_1,X_2) soit un repère de (Π), par $a \leqslant r \leqslant b$, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$ et $-\frac{\ell}{2} \leqslant z \leqslant \frac{\ell}{2}$ (a,b,ℓ étant des constantes réelles positives, et $\theta_0 \in\,]0,\pi[$).

. La tige $\mathcal{T}$ est schématisée par un segment de droite $[P_1P]$ de longueur L, le point P_1 étant sur le bord extérieur de $\mathcal{S}_1$ et P sur le bord intérieur de $\mathcal{C}$, tel que $\mathcal{T}$ soit normale en P_1 à $\mathcal{S}_1$. Les coordonnées cylindriques dans $\mathcal{R}$ du point P sont notées $(a,\theta_P,0)$. L'angle $\left(u_{\theta_P},\overrightarrow{PP_1}\right)$ est noté β (u_{θ_P} étant le 2ème vecteur de la base locale en P). L'angle β appartient à $]0,\pi[$.

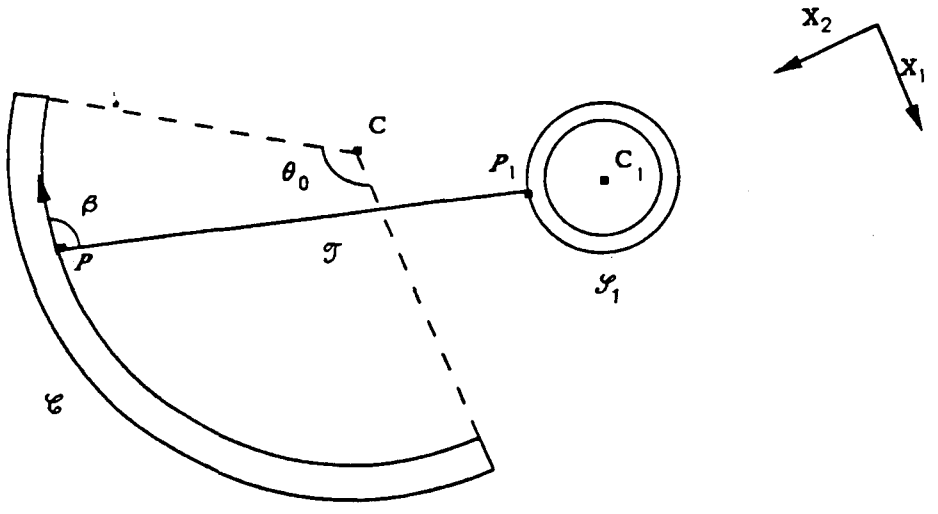

figure : vue en coupe (dans le plan (Π)) d'un exemple de réalisation de $\mathcal{S}$.

Les solides $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{C}$ sont supposés rigides, homogènes, de masses volumiques respectives μ_1 et μ, la tige $\mathcal{T}$ est supposée sans masse. Le solide $\mathcal{S}$ est donc défini par le jeu de paramètres : $(R_i, R_e, a, b, \theta_0, \ell, L, \theta_P, \beta, \mu_1, \mu)$. On note $(r_G, \theta_G, 0)$ les coordonnées cylindriques dans $\mathcal{R}$ du centre de gravité G de $\mathcal{S}$, $\mathcal{J}$ le moment d'inertie de $\mathcal{S}$ par rapport à l'axe GX_3, et m la masse de $\mathcal{S}$.

On étudie dans cette partie le mouvement de $\mathcal{S}$, posé sur le plan horizontal défini par (O, e_2, e_3) de telle manière que le contact se fasse sur la face inférieure de la portion de cylindre $\mathcal{C}$. On appelle J le point de contact appartenant à (Π), ses coordonnées cylindriques dans $\mathcal{R}$ sont notées $(b, \theta_J, 0)$. On supposera de plus que, au cours du mouvement, le réservoir $\mathcal{S}_1$ n'entre pas en contact avec le plan horizontal.

I.1. Calculer les coordonnées des centres de gravité de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{S}$ dans le repère $\mathcal{R}$, en fonction du jeu de paramètres définissant $\mathcal{S}$.

I.2. On suppose que $\mathcal{S}$ roule sans glisser et sans pivoter sur le plan horizontal. A tout instant, au cours du mouvement, (Π) coïncide avec le plan défini par (O, e_1, e_2).
Donner une équation différentielle du second ordre à laquelle doit satisfaire $\tilde{\theta} = \theta_J - \theta_G$. Déterminer une équation intégrale première du mouvement de la forme : $\dot{\tilde{\theta}}^2 = f(\tilde{\theta})$.

I.3. Montrer que pour un jeu de paramètres donné, il y a au plus un équilibre possible ; on note $\tilde{\theta}_e$ la valeur de $\tilde{\theta}$ correspondant à cet équilibre éventuel. Donner les valeurs que peut prendre $\tilde{\theta}_e$. Etudier la stabilité, au sens de Liapounov, de l'équilibre éventuel.

I.4. Montrer qu'il existe un équilibre stable pour $\mathcal{S}$, si et seulement si le jeu de paramètres définissant $\mathcal{S}$ vérifie :

$$(*) \qquad \frac{\mu\ell(b^3-a^3)}{3}(1-\cos\theta_0) > m_1 \max[(a\sin(\theta_P-\theta_0)+L'\cos(\theta_P+\beta-\theta_0)), -(a\sin\theta_P+L'\cos(\theta_P+\beta))]$$

avec $m_1 = \frac{4}{3}\mu_1\pi\left(R_e^3 - R_i^3\right)$ et $L' = L + R_e$.

I.5. On introduit dans $\mathcal{S}_1$ une masse m_ℓ de liquide supposé parfait, c'est à dire qui n'exerce pas de frottement sur la paroi intérieure de $\mathcal{S}_1$. La surface du fluide est constamment horizontale, le fluide étant animé d'un mouvement de solide en translation par rapport à $\mathcal{R}_0$. On notera G' le centre de gravité du système constitué de $\mathcal{S}$ et du liquide.

I.5.a. Montrer qu'il y a au plus un équilibre possible et que la position d'équilibre est la même que celle obtenue pour un solide S' correspondant au jeu de paramètres : $(R_i, R_e, a, b, \theta_0, \ell, L, \theta_p, \beta, \mu_1', \mu)$, où μ_1' est choisie pour que la masse m_1' de $\mathcal{S}_1$ soit $m_1 + m_\ell$.

I.5.b. Dire comment doit être modifiée la condition (*) de façon à obtenir une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un équilibre pour lequel G' est situé au-dessous de C.

I.6. On supposera maintenant que le réservoir $\mathcal{S}_1$ est rempli par le liquide, montrer que la fonction :

$$U\left(\dot\theta_J, \theta_J\right) = \dot\theta_J^2 \left(J + m\, JG^2 + m_\ell\, JC_1^2\right) - 2\,(m + m_\ell)\,\vec g \,.\, \overrightarrow{OG'}$$

constitue une intégrale première du mouvement. Etudier la stabilité de l'équilibre (au sens de Liapounov).

Dans la suite du problème on adoptera les notations suivantes : soit $\mathcal{L}_{n,p}$ l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et A un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle <u>forme différentielle</u> α sur A à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ toute application de A dans $\mathcal{L}_{n,p}$. On appelle <u>fonctions coefficients</u> de α relativement aux bases $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_p$ de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ les fonctions qui à tout M de A associent les coefficients $a_{ij}(M)$ de la matrice de $\alpha(M)$ dans les bases $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_p$. On dit que la forme différentielle α est <u>exacte</u> s'il existe une application f différentiable de A dans $\mathbb{R}^p$ dont la différentielle coïncide avec α sur A.
On dira que <u>le lemme de Poincaré</u> s'applique sur A lorsque, pour toute forme différentielle α de classe C^1 sur A à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, α est exacte si, et seulement si, ses coefficients $(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant p,\, 1\leqslant j\leqslant n}$ vérifient les relations :

$$\frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j} = \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} \qquad (1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant n,\ 1\leqslant k\leqslant p)$$

On note :

- $T_n(A)$ l'espace des applications de classe C^∞ de A dans $\mathcal{L}_{n,n}$
- $T_{n,s}(A)$ (respectivement $T_{n,a}(A)$) l'espace des applications de classe C^∞ de A dans l'espace des endomorphismes symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathbb{R}^n$
- $\mathcal{V}_n(A)$ l'espace des champs de vecteurs (c'est à dire des applications de A dans $\mathbb{R}^n$) de classe C^∞ sur A.

Soit u un élément de $\mathcal{V}_n(A)$. Sa différentielle du est élément de $T_n(A)$.
Notation : on note ε_u (resp. Φ_u) l'élément de $T_{n,s}(A)$ (resp. $T_{n,a}(A)$) qui à tout X de A associe la partie symétrique (resp. antisymétrique) de la différentielle de u au point X.

Formule d'Ostrogradski : Soit V une fonction vectorielle de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$. Soit K un compact inclus dans U dont la frontière ∂K est composée d'un nombre fini de morceaux de surfaces de classe C^1.

On a : $$\int_{\partial K} V \cdot h \, da = \int_K \operatorname{div} V \, d\lambda$$

(h est le vecteur unitaire de la normale au point courant M de ∂K dirigé vers l'extérieur de K, da est l'élément d'aire et $d\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$).

Deuxième partie

Cette partie a pour objectif d'établir certaines conséquences du lemme de Poincaré et de la formule d'Ostrogradski qui seront utilisées dans les parties suivantes.

Dans cette partie A désigne un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ sur lequel s'applique le lemme de Poincaré.

II.1. Soit $u \in \mathcal{V}_n(A)$, ε_{ij} et Φ_{ij} (i et j allant de 1 à n) sont les fonctions coefficients de ε_u et Φ_u dans la base canonique.

II.1.a. Montrer que les relations suivantes sont vérifiées sur A :

$$\forall\ (i,j,k) \in \{1,..,n\}^3 \qquad \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i}$$

II.1.b. En déduire que : $\forall\ (i,j,k,\ell) \in \{1,..,n\}^4$

$$(**) \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_{j\ell}}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_\ell} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_\ell} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{i\ell}}{\partial x_j \partial x_k} = 0$$

II.2. Soit ε un élément de $T_{n,s}(A)$. On pose : $\mathcal{U} = \{\ u \in \mathcal{V}_n(A)\ /\ \varepsilon_u = \varepsilon\ \}$.

II.2.a. Montrer que $\mathcal{U}$ est non vide, si et seulement si les fonctions coefficients ε_{ij} de ε vérifient les relations (**) sur A.

II.2.b. On suppose que les fonctions coefficients de ε vérifient les relations (**). Soit u_0 un élement de $\mathcal{U}$. Montrer que l'on obtient tous les éléments de $\mathcal{U}$ en ajoutant à u_0 les champs affines dont la partie linéaire est antisymétrique.

II.3. Dans cette question n vaut 3. Soit σ un élément de $T_{3,s}(A)$, tel que pour toute partie D de A dont le bord ∂D est une surface de classe C^1, on ait : $\int_{\partial D} \sigma(M)(h)\, da = 0$, où h désigne le vecteur unitaire de la normale à ∂D en M dirigé vers l'extérieur de D et da l'élément d'aire.

II.3.a. Montrer que pour toute boule fermée $\mathcal{B}$ incluse dans A et pour $i \in \{1,2,3\}$ on a :

$$\int_{\mathcal{B}} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\, d\lambda = 0$$

II.3.b. En déduire que les fonctions coefficients de σ vérifient le système différentiel suivant sur A :

$$\forall\, i \in \{1,2,3\} \qquad \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

Troisième partie

Dans cette partie on ne suppose plus que $\mathcal{C}$ est rigide.

On considère le système S de la première partie dans son état d'équilibre stable et on s'intéresse à la partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}$ pour laquelle $\theta \in [\theta_J, \theta_P]$.

La partie $\mathcal{A}$ est elle-même en équilibre sous l'action de son propre poids et sous l'action de forces surfaciques, réparties sur ses faces terminales $\theta = \theta_P$ et $\theta = \theta_J$, correspondant aux efforts exercés par la tige $\mathcal{T}$, par les parties de $\mathcal{C}$ situées de part et d'autre de $\mathcal{A}$ et par le plan horizontal. En l'absence de forces, $\mathcal{A}$ est une portion de cylindre, on notera $\mathcal{A}_3$ l'intérieur de $\mathcal{A}$. Lorsque les forces s'appliquent sur $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_3$ se déforme en un ensemble $\mathcal{A}_3'$ (configuration à l'équilibre). Tout point M de $\mathcal{A}_3$ sera déplacé pour occuper la position M' dans $\mathcal{A}_3'$. Le vecteur : $u(M) = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$ sera appelé le déplacement de M. On supposera que le champ de vecteurs u appartient à $\mathcal{V}_3(\mathcal{A}_3)$, ε_u appartient donc à $T_{3,s}(\mathcal{A}_3)$ et est appelé champ de déformations.

Lorsque des forces sont appliquées sur $\mathcal{A}$, il apparait dans $\mathcal{A}_3$ des efforts intérieurs. On démontre qu'il existe une application $\sigma \in T_{3,s}(\mathcal{U}_3)$, où $\mathcal{U}_3$ est un ouvert contenant $\overline{\mathcal{A}_3}$, appelée champ de contraintes, telle que, pour toute partie $\mathcal{D}$ de $\mathcal{A}_3$ dont le bord $\partial\mathcal{D}$ est une surface orientée de classe C^1, et pour tout point M de $\partial\mathcal{D}$, $\sigma(M)(h)$ représente les actions de contact au point M, h étant la normale en M orientée vers l'extérieur de $\mathcal{D}$. L'ensemble des actions de contact sur $\mathcal{D}$ a donc pour résultante $\int_{\partial\mathcal{D}} \sigma(M)(h)\, da$, où da est l'élément d'aire.

On dit que le champ de contraintes σ est un champ de contraintes planes si ses fonctions coefficients σ_{ij} ne dépendent pas de x_3 et si $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$ sur $\mathcal{A}_3$.

On appelle $\mathcal{A}_2$ la coupe de $\mathcal{A}_3$ par le plan (Π) ($\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_3 \cap (\Pi)$). Le plan (Π) sera muni du repère (C, e_1, e_2) et assimilé à $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}_2$ sera un domaine de $\mathbb{R}^2$.

Nous admettrons que le lemme de Poincaré s'applique sur $\mathcal{A}_3$ et sur $\mathcal{A}_2$.

Comme dans tout le problème, n peut valoir 2 ou 3. Le repère de travail dans $\mathbb{R}^n$ est : $(C, e_1, .., e_n)$. La notation $\mathcal{A}_n$ désigne $\mathcal{A}_2$ ou $\mathcal{A}_3$ suivant la valeur de n. Les constantes $E > 0$ et $\frac{1}{2} > \nu > -1$ seront des réels fixés.

Soit φ_n un champ de vecteurs sur $\partial\mathcal{A}_n$, continu sur chacune des faces (respectivement des arêtes) constituant $\partial\mathcal{A}_n$.

Résoudre sur $\mathcal{A}_n$ le problème élastostatique (E_n) associé à φ_n, c'est trouver $(u,\sigma) \in \mathcal{V}_n(\mathcal{A}_n) \times T_{n,s}(\mathcal{U}_n)$, où $\mathcal{U}_n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant $\overline{\mathcal{A}_n}$, satisfaisant aux conditions suivantes en tout point M de $\mathcal{A}_n$:

i) $$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}(M) = 0 \quad \forall\, i \in \{1,..,n\}$$

ii) $$\varepsilon_u(M) = \frac{1+\nu}{E}\,\sigma(M) - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\sigma(M)\ \mathbb{I}$$

où $\mathbb{I}$ est l'identité de $\mathbb{R}^n$, ainsi qu'aux <u>conditions aux limites</u> :en tout point M du bord $\partial\mathcal{A}_n$ de $\mathcal{A}_n$ où la normale h (supposée unitaire et dirigée vers l'extérieur de A) est définie,

$$\sigma(M)(h) = \varphi_n(M)$$

Le champ φ_n représente les efforts extérieurs surfaciques (respectivement linéiques) exercés sur le bord de $\mathcal{A}_n$. Les équations d'équilibre *i)* ont été établies dans la partie II (on suppose que la masse volumique μ de $\mathcal{A}$ est nulle). La relation *ii)* traduit le fait que le matériau constituant $\mathcal{A}$, est linéaire-isotrope : en tout point M de $\mathcal{A}_n$, $\varepsilon_u(M)$ et $\sigma(M)$ sont liés par une relation indépendante de la base orthonormée choisie pour l'exprimer, c'est à dire une relation indifférente au sens des préliminaires, et homogène : les réels ν et E qui interviennent dans la relation ne dépendent pas du point M de $\mathcal{A}_n$ où la relation est exprimée.

III.1. Soit (u,σ) solution du problème (E_3) associé à φ_3, on note u_i les fonctions coordonnées de u.

III.1.a. Montrer que :

$$\sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial(\sigma_{ij}u_i)}{\partial x_j} - \sigma_{ij}\,\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = 0$$

En déduire que :

$$\int_{\mathcal{A}_3} \left(\sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \right) d\lambda \;-\; \int_{\partial\mathcal{A}_3} u\cdot\varphi_3 \;\; da = 0$$

III.1.b. Montrer que, pour tout M de $\mathcal{A}_3$, l'expression : $\sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$ est une forme quadratique définie positive des composantes $\sigma_{ij}(M)$.

III.1.c. En déduire que si le problème (E_3) associé à φ_3 admet une solution, celle-ci est unique à un déplacement affine de partie linéaire antisymétrique près

On admettra que si le problème (E_2) associé à φ_2 admet une solution celle-ci est unique (démonstration analogue).

III.2. Soit φ_3 un champ de vecteurs sur $\partial\mathcal{A}_3$, à valeurs dans le plan vectoriel de base (e_1,e_2). On suppose de plus que φ_3 ne dépend pas de x_3 et que φ_3 est nul (pas d'efforts exercés) sur les faces latérales : $x_3 = \frac{\ell}{2}$, $x_3 = -\frac{\ell}{2}$. On considère $(u,\sigma) \in \mathcal{V}_3(\mathcal{A}_3) \times T_{3,s}(\mathcal{U}_3)$, $\mathcal{U}_3$ étant un ouvert contenant $\mathcal{A}_3$ et σ un champ de contraintes planes sur $\mathcal{A}_3$.

III.2.a. Montrer que si (u,σ) vérifie les conditions *i*), *ii*) de (E_3) associé à φ_3, alors le plan vectoriel de base (e_1,e_2) est stable par $\sigma(M)$ et $\varepsilon_u(M)$ pour tout M de $\mathcal{A}_3$ et la condition aux limites de (E_3) sur les faces $x_3 = -\frac{\ell}{2}$ et $x_3 = \frac{\ell}{2}$ est trivialement vérifiée.

III.2.b. On note σ_2 et φ_2, les applications (sur $\mathcal{A}_2$) naturellement déduites de σ et φ_3. Montrer que si (u,σ) est solution de (E_3) associé à φ_3, il existe u_2 tel que (u_2,σ_2) soit solution de (E_2) associé à φ_2.

III.3. Montrer, en utilisant (**), que si $(u,\sigma) \in \mathcal{V}_2(\mathcal{A}_2) \times T_{2,s}(\mathcal{A}_2)$ vérifie les conditions *i*) et *ii*) de (E_2) alors les fonctions coefficients σ_{ij} de σ vérifient sur $\mathcal{A}_2$ les relations :

$$iii) \qquad \frac{\partial^2(\sigma_{11} - \omega(\sigma_{11}+\sigma_{22}))}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2(\sigma_{22} - \omega(\sigma_{11}+\sigma_{22}))}{\partial x_1^2} = 2\,\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

avec $\omega = \dfrac{\nu}{1+\nu}$.

III.4. Montrer que si $\sigma \in T_{2,s}(\mathcal{A}_2)$ vérifie les relations *i*) de (E_2) et *iii*) sur $\mathcal{A}_2$, alors il existe $u \in \mathcal{V}_2(\mathcal{A}_2)$ tel que les conditions *ii*) de (E_2) soient vérifiées.

III.5. Une fonction V de classe C^4 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ sera dite <u>biharmonique</u> si le laplacien de son laplacien est nul : $\Delta(\Delta V) = 0$.
Montrer que $\sigma \in T_{2,s}(\mathcal{A}_2)$ est solution de *i*) de (E_2) et *iii*) si et seulement si il existe une fonction biharmonique V de classe C^∞ sur $\mathcal{A}_2$ telle que :

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}$$

III.6. On travaille maintenant dans le système de coordonnées polaires associé à (C,e_1,e_2), on appelle (e_r,e_θ) la base locale au point M de $\mathcal{A}_2$.
Montrer que $\sigma \in T_{2,s}(\mathcal{A}_2)$ est solution de *i*) de (E_2) et *iii*) si et seulement si il existe une fonction biharmonique $W(r,\theta)$ de classe C^∞ sur $\mathcal{A}_2$ telle que :

$$(***) \qquad \begin{cases} \sigma_{rr} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial W}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \\ \sigma_{r\theta} = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial W}{\partial \theta}\right) \\ \sigma_{\theta\theta} = \dfrac{\partial^2 W}{\partial r^2} \end{cases}$$

où $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta\theta}$ sont les fonctions coefficients de σ dans la base (e_r,e_θ).

Quatrième partie

Pour résoudre le problème plan (E_2) associé à un champ φ_2 on est donc amené à chercher des fonctions W, biharmoniques sur $\mathcal{A}_2$ et de classe C^∞ sur un ouvert $\mathcal{U}_2$ de $\mathbb{R}^2$ contenant $\overline{\mathcal{A}_2}$, telles que si σ a pour fonctions coefficients dans la base locale les fonctions définies par les relations (***), alors σ vérifie les conditions aux limites de (E_2). Le repère de travail est toujours (C,e_1,e_2), r et θ désignent les coordonnées polaires associées à ce repère.

IV.1. On pose : $W(r,\theta) = g(r)\sin\theta + f(r)$ où g et f sont des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que la condition "W biharmonique" se traduit par deux équations différentielles : l'une du quatrième ordre sur g et l'autre d'ordre 3 sur la dérivée f' de f.

IV.2. A l'aide du changement de variable $r = e^t$, résoudre les deux équations différentielles obtenues à la question précédente. Montrer que :
$W(r,\theta) = \left(Ar^3 + \frac{B}{r} + D\, r\ln r + Er\right)\sin\theta + (A'r^2 + B'\ln r + C'r^2\ln r + D')$
où A,B,D,E,A',B',C',D' sont des constantes réelles.

IV.3. Soit σ l'élément de $T_{2,s}(\mathbb{R}^{2*})$ dont les fonctions coefficients sont définies, en fonction de W calculée au IV.2, par les relations (***). On note φ_2 le champ de vecteurs sur $\partial\mathcal{A}_2$ tel qu'en tout point M de $\partial\mathcal{A}_2$, $\varphi_2(M) = \sigma(M)(h)$ où h est la normale unitaire en M dirigée vers l'extérieur de $\mathcal{A}_2$.
Déterminer φ_2 sur les faces $r = a$ et $r = b$. Donner des conditions portant sur A,B,D,A',B',C',a,b pour que φ_2 soit nul sur ces faces.

IV.4. <u>On supposera dans toute la suite que les conditions du IV.3. sont satisfaites</u>

IV.4.a. Calculer les éléments de réduction en C du torseur associé à φ_2 sur les faces $\theta = 0$ et $\theta = \theta_p$. Expliquer en quoi les résultats obtenus correspondent bien à l'action des efforts extérieurs, évoqués dans la troisième partie, sur $\mathcal{A}$.

IV.4.b. Calculer les valeurs des constantes : A,B,D,A',B',C' en fonction de a,b,ℓ et des normes de la résultante et du moment en C du torseur associé à φ_2 sur la face $\theta = \theta_p$.

IV.5. Soient $u \in \mathcal{V}_2(\mathcal{A}_2)$ tel que (u,σ) soit solution de (E_2) associé à φ_2. On note u_r et u_θ les composantes de u dans la base locale.

IV.5.a. Montrer qu'en tout point M de $\mathcal{A}_2$,

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}\ ,\quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\ ,\quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right)$$

IV.5.b. Montrer que :

$$\begin{cases} u_r = f_1 + K\sin\theta + G\cos\theta \\ u_\theta = f_2 + K\cos\theta - G\sin\theta + Hr \end{cases}$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions de $A, B, D, A', B', C', \nu, E, r, \theta$ que l'on précisera et K, G, H sont des constantes réelles. A quoi correspondent les termes en K, G, H ?

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Notations et Définitions

On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, c'est à dire un ensemble Ω muni d'une tribu $\mathcal{A}$ et d'une loi de probabilité $\mathbb{P}$. Pour abréger, on appellera *v.a.r. sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ toute variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$, et *v.a. sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *à valeurs dans* $(X, \mathcal{B})$ toute application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(X, \mathcal{B})$, lorsque X est un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{B}$.

• Pour une v.a.r. Z sur $(\Omega, \mathcal{A})$, on pose $\mathbb{E}(Z) = \int_\Omega Z(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$, si Z est positive ou intégrable, et $\|Z\|_r = (\mathbb{E}(|Z|^r))^{1/r}$ pour tout nombre réel $r \geq 1$.

• On appelle *variable de Bernoulli symétrique* toute v.a.r. Y sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = -1) = 1/2$.

• Soient $V, T \subset X$ et x un point de X. On pose alors:
$V \setminus T = \{s \in V \mid s \notin T\}$ et $V \triangle T = (V \setminus T) \cup (T \setminus V)$,
$\mathbb{1}_V(x) = 1$ si $x \in V$, et $\mathbb{1}_V(x) = 0$ sinon,
$\#(V) =$ cardinal(V) si V est fini, et $\#(V) = +\infty$ sinon.

• Pour chaque $x = (x_1, \cdots, x_n) \in X^n$, on considère sur $(X, \mathcal{B})$ la loi de probabilité $\nu_n^x : A \in \mathcal{B} \longmapsto \frac{1}{n}(\mathbb{1}_A(x_1) + \cdots + \mathbb{1}_A(x_n))$ (*loi empirique sur* $(x_1, \cdots, x_n)$).

• On rappelle le résultat suivant sur les v.a. indépendantes (c'est simplement une forme du *théorème de Fubini*):
soient Y et Z des v.a. indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs respectivement dans $(B, \mathcal{B})$ et $(C, \mathcal{C})$; soit f une application mesurable de $(B \times C, \mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$ dans $[0, +\infty]$;
alors l'application $g : y \longmapsto \mathbb{E}(f(y, Z))$ est mesurable
et on a $\mathbb{E}(f(Y, Z)) = \mathbb{E}(g(Y))$.

• On appellera par abus de language *distance* sur un ensemble U toute application $d : U^2 \longrightarrow [0, +\infty[$ vérifiant $d(u, u) = 0$, $d(u, v) = d(v, u)$ et $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ pour tous $u, v, w \in U$ ($d(u, v) = 0$ n'implique pas nécessairement $u = v$).
Si U est un ensemble muni d'une distance d, on pose $\text{diam}(U) = \sup_{u,v \in U} d(u, v)$; on dit qu'une partie T de U est *ε-discernable* si on a $d(s, t) > \varepsilon$ pour tous s, t distincts dans T; on dit que T est *ε-dense* dans U si, pour chaque $u \in U$, il existe $u_T \in T$ avec $d(u, u_T) \leq \varepsilon$; on dit que T est un *ε-réseau* de U si T est à la fois ε-discernable et ε-dense dans U.
Lorsque U est fini, on admettra l'existence d'ε-réseaux pour chaque $\varepsilon \in]0, +\infty[$ quelle que soit d (un ε-réseau s'obtient en choisissant successivement des points de U de distances mutuelles $> \varepsilon$; au bout d'un nombre fini de choix, on doit s'arrêter).

• Si Q est une loi de probabilité sur $(X, \mathcal{B})$, on pose $d_Q(V,T) = Q(V \triangle T)$ pour tous $V, T \in \mathcal{B}$.

Les parties I et II sont indépendantes. La partie III dépend des parties I et II. La partie IV fournit des exemples d'application de la partie III.

Question préliminaire.
Soit Q une loi de probabilité sur $(X, \mathcal{B})$; montrer que $d_Q : (V,T) \longmapsto Q(V \triangle T)$ est une distance sur $\mathcal{B}$.

Première Partie

On fixe un entier $n > 0$.

Soient $Y_1, \cdots, Y_n$ des variables de Bernoulli symétriques indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Pour chaque $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, on considère la v.a.r. $Z(a) : \omega \longmapsto |\sum_{i=1}^n a_i Y_i(\omega)|$.
Pour tous $p_1, \cdots, p_n$ entiers ≥ 0 de somme p, on pose

$$c(p; p_1, \cdots, p_n) = \frac{p!}{p_1! \cdots p_n!}.$$

On rappelle la *formule multinomiale*:

$$(\sum_{i=1}^n a_i)^p = \sum_{p_1, \cdots, p_n} c(p; p_1, \cdots, p_n) a_1^{p_1} \cdots a_n^{p_n}$$

où la somme est prise sur tous les $p_1, \cdots, p_n$ entiers ≥ 0 de somme p.

On se propose de montrer que $\|Z(a)\|_r$ et $\|Z(a)\|_2$ sont comparables pour tout $r \in [1, +\infty[$ indépendamment de a et de n.

1.
(a) Soient $p_1, \cdots, p_n$ des entiers ≥ 0. Montrer que $\mathbb{E}(\prod_{i=1}^n Y_i^{p_i})$ est nul dès que l'un des p_i est impair.
(b) Montrer que $\mathbb{E}(Z(a)^2)$ vaut $\sum_{i=1}^n a_i^2$.
(c) Soit p un entier ≥ 0. Montrer que $\mathbb{E}(Z(a)^{2p})$ vaut

$$\sum_{p_1, \cdots, p_n} c(2p; 2p_1, \cdots, 2p_n) a_1^{2p_1} \cdots a_n^{2p_n},$$

où la somme est prise sur tous les $p_1, \cdots, p_n$ entiers ≥ 0 de somme p.

2. Montrer que $c(2p; 2p_1, \cdots, 2p_n)$ est majoré par $\frac{(2p)!}{p!} c(p; p_1, \cdots, p_n)$ pour tout entier $p \geq 0$ et tous $p_1, \cdots, p_n$ entiers ≥ 0 de somme p.
En déduire l'inégalité suivante, pour tout entier $p \geq 0$:

$$\mathbb{E}(Z(a)^{2p}) \leq \frac{(2p)!}{p!} (\mathbb{E}(Z(a)^2))^p.$$

3. Montrer que $\|Z(a)\|_r$ est majoré par $\sqrt{r}\, \|Z(a)\|_2$ pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et tout entier pair $r \geq 2$. En déduire l'encadrement suivant:

$$\|Z(a)\|_2 \leq \|Z(a)\|_t \leq \sqrt{t+2}\, \|Z(a)\|_2$$

pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $t \geq 2$.

4. Soient s, t des nombres réels positifs ($1 \leq s \leq 2 \leq t < +\infty$); on définit λ par $\frac{1}{2} = \lambda\frac{1}{s} + (1-\lambda)\frac{1}{t}$.
Montrer que, pour toute v.a.r. X sur $(\Omega, \mathcal{A})$, $\|X\|_2$ est majoré par $\|X\|_s^{\lambda}\|X\|_t^{1-\lambda}$.
En déduire l'encadrement suivant:

$$\|Z(a)\|_s \leq \|Z(a)\|_2 \leq 2^{\frac{4-2s}{s}}\|Z(a)\|_s.$$

pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $s \in [1,2]$.

5. Montrer que $(2p)!$ est majoré par $4^p(p!)^2$. En déduire l'inégalité suivante:

$$\mathbb{E}(\exp(\lambda Z(a)^2/\|Z(a)\|_2^2)) \leq \frac{1}{1-4\lambda}$$

pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel λ de module $< 1/4$.

6. Soit r un nombre réel > 2. Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est le segment $[0,1]$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue, indiquer quel est l'ensemble des valeurs que peut prendre $\|X\|_r/\|X\|_2$ quand X décrit l'ensemble des v.a.r. de carré intégrable sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Seconde Partie

Soit U un ensemble et soit $(Z_u)_{u\in U}$ une famille de v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On fixe $r \in [1, +\infty[$ et on munit U de la distance $d_{(r)} : (u,v) \mapsto \|Z_u - Z_v\|_r$.
On suppose que $\mathrm{diam}(U)$ est fini et vaut δ.

On pose $\varepsilon_i = \delta 2^{-i}$ pour tout i entier ≥ 0.
Dans les questions 1, 2 et 3, on suppose que U est fini et on note ℓ le plus petit entier i tel que l'on ait $d(u,v) > \varepsilon_i$ pour tous $u, v \in U$ distincts.
Dans les questions 4 et 5, on suppose que U est dénombrable.

Soient $c \geq 0$ et $\beta \geq 0$. On suppose que toute partie ε-discernable de U (lorsque U est muni de la distance $d_{(r)}$) est de cardinal inférieur ou égal à $c\varepsilon^{-\beta}$, quel que soit $\varepsilon \in]0, \delta]$.
On se propose d'évaluer $\|\sup_{u\in U}|Z_u|\|_r$ sous cette hypothèse.

1. Etablir l'encadrement suivant:

$$\sup_{u\in U}\mathbb{E}(|Z_u|^r) \leq \mathbb{E}(\sup_{u\in U}|Z_u|^r) \leq \#(U)\sup_{u\in U}\mathbb{E}(|Z_u|^r).$$

2. Fixons $s \in U$; on se donne $T_0 = \{s\}$, $T_\ell = U$ et, pour chaque $i = 1, \cdots, \ell-1$, un ε_i-réseau T_i de U. Montrer que T_0 est un ε_0-réseau et que T_ℓ est un ε_ℓ-réseau et que chaque T_i (pour $i = 0, \cdots, \ell$) est de cardinal inférieur ou égal à $c\varepsilon_i^{-\beta}$.
Montrer que, pour chaque $i = 0, \cdots, \ell-1$, on peut trouver une application π_i : $T_{i+1} \longrightarrow T_i$ avec $d_{(r)}(s, \pi_i(s)) \leq \varepsilon_i$ pour tout $s \in T_{i+1}$.

3. Pour chaque $i = 0, \cdots, \ell$, on pose $W_i = \sup_{s\in T_i}|Z_s|$; montrer que, pour chaque $i = 0, \cdots, \ell-1$, $\|W_{i+1}\|_r$ est majoré par $\|W_i\|_r + \varepsilon_i\,(\#(T_{i+1}))^{1/r}$ (on pourra utiliser la question II.1). En déduire l'inégalité suivante:

$$\|\sup_{u\in U}|Z_u|\|_r \leq \|Z_s\|_r + \sum_{i=0}^{\ell-1}\varepsilon_i\,(\#(T_{i+1}))^{1/r}.$$

4. On suppose désormais que U est dénombrable, et non plus fini, et on fixe $s \in U$. Etablir l'inégalité suivante:

$$\| \sup_{u \in U} |Z_u| \|_r \leq \|Z_s\|_r + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i \, c^{1/r} \, \varepsilon_{i+1}^{-\beta/r}.$$

5. Montrer que, dès que $r > 2\beta$,

$$\| \sup_{u \in U} |Z_u| \|_r \text{ est majoré par } \|Z_s\|_r + 5c^{1/r} \, \delta^{1-(\beta/r)}.$$

Troisième Partie

Soit X un ensemble muni de la tribu $\mathcal{B}$ et soient $X_1, \cdots, X_n, X'_1, \cdots, X'_n$ des v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $(X, \mathcal{B})$, indépendantes et de loi P; soient $Y_1, \cdots, Y_n$ des variables de Bernoulli symétriques sur $(\Omega, \mathcal{A})$ indépendantes entre elles et indépendantes de la suite $(X_1, \cdots, X_n, X'_1, \cdots, X'_n)$.
Soit $x = (x_1, \cdots, x_n) \in X^n$; on pose alors pour tout $B \in \mathcal{B}$:

$$\nu_n^x(B) = \tfrac{1}{n} \left(\textstyle\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_B(x_i)\right) \text{ et } \mu_n^x(B) = \tfrac{1}{n} \left(\textstyle\sum_{i=1}^n Y_i \mathbb{1}_B(x_i)\right).$$

Par ailleurs, on pose pour tout $B \in \mathcal{B}$:

$$\nu_n(B) = \tfrac{1}{n} \left(\textstyle\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_B(X_i)\right) \text{ et } \mu_n(B) = \tfrac{1}{n} \left(\textstyle\sum_{i=1}^n Y_i \mathbb{1}_B(X_i)\right),$$
$$\nu'_n(B) = \tfrac{1}{n} \left(\textstyle\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_B(X'_i)\right).$$

On fixe un entier pair $r \geq 2$.

Soit $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$ une famille dénombrable de parties de X contenant $\emptyset$.
Soient $c \geq 1$ et $\beta \geq 1$. On suppose que $\mathcal{V}$ *possède la propriété* $VC(c, \beta)$, c'est à dire que, pour chaque loi de probabilité Q sur $(X, \mathcal{B})$, toute partie ε-discernable de $\mathcal{V}$ (lorsque $\mathcal{V}$ est muni de la distance $d_Q : (V, T) \longmapsto Q(V \, \Delta \, T)$) est de cardinal inférieur ou égal à $c\varepsilon^{-\beta}$, quel que soit $\varepsilon \in]0, 1]$.

On en verra des exemples dans la partie IV.

On se propose de démontrer que la quantité $\| \sup_{V \in \mathcal{V}} \sqrt{n} \, |\nu_n(V) - P(V)| \|_r$ reste bornée indépendamment de n et de P.
1. Soit q tel que $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} (ty - \frac{|t|^q}{q}) \text{ vaut } \frac{|y|^r}{r}.$$

2. Déduire de la question précédente que, pour tout $x \in X^n$,

$$\sup_{V \in \mathcal{V}} |\nu_n^x(V) - P(V)|^r \text{ est majoré par } \mathbb{E}(\sup_{V \in \mathcal{V}} |\nu_n^x(V) - \nu'_n(V)|^r).$$

On pose $D_n = \| \sup_{V \in \mathcal{V}} |\nu_n(V) - P(V)| \|_r$; montrer l'inégalité suivante:

$$D_n^r \leq \mathbb{E}(\sup_{V \in \mathcal{V}} |\nu_n(V) - \nu'_n(V)|^r).$$

3. Posons $Z_i = \mathbb{1}_V(X_i) - \mathbb{1}_V(X_i')$ pour $i = 1, \cdots, n$; montrer que $(Z_1, \cdots, Z_n)$ a même loi que $(Y_1 Z_1, \cdots, Y_n Z_n)$. En déduire l'inégalité suivante:

$$D_n^r \leq \mathbb{E}(\sup_{V \in \mathcal{V}} |\frac{1}{n} (\sum_{i=1}^{n} Y_i(\mathbb{1}_V(X_i) - \mathbb{1}_V(X_i'))|^r)$$

et donc que D_n est majoré par $2\| \sup_{V \in \mathcal{V}} |\mu_n(V)|\|_r$.

4. Fixons $x \in X^n$; montrer l'inégalité suivante:

$$\|\sqrt{n}\ (\mu_n^x(V) - \mu_n^x(T))\|_r \leq \sqrt{r}\sqrt{\nu_n^x(V \,\Delta\, T)}.$$

5. Fixons $x \in X^n$; on munit $\mathcal{V}$ de la distance

$$d_{(r)} : (V, T) \mapsto \|\sqrt{n}\ (\mu_n^x(V) - \mu_n^x(T))\|_r.$$

Montrer que toute partie ε-discernable de $\mathcal{V}$ (lorsque $\mathcal{V}$ est muni de la distance $d_{(r)}$) est de cardinal inférieur ou égal à $c_0 \varepsilon^{-\beta_0}$ (avec $c_0 = cr^\beta$ et $\beta_0 = 2\beta$), quel que soit $\varepsilon \in]0, \sqrt{r}]$.

6. Fixons $x \in X^n$; on pose

$$A_n^x = \| \sup_{V \in \mathcal{V}} \sqrt{n}\ |\mu_n^x(V)|\|_r \text{ et } \delta_n^x = \sup_{V,T \in \mathcal{V}} \nu_n^x(V \,\Delta\, T).$$

Montrer que, dès que $r > 4\beta$,

$$A_n^x \text{ est majoré par } 5c^{1/r}\sqrt{r}\ (\delta_n^x)^{(1/2)-(\beta/r)}.$$

7. Montrer que la quantité $\| \sup_{V \in \mathcal{V}} \sqrt{n}\ |\nu_n(V) - P(V)|\|_r$ est majorée par $10c^{1/r}\sqrt{r}$ dès que $r > 4\beta$.

8. On se place sur $X = \mathbb{R}$; trouver un ensemble dénombrable $\mathcal{T}$ de parties de $\mathbb{R}$ tel que la quantité $\| \sup_{T \in \mathcal{T}} \sqrt{n}\ |\nu_n(T) - P(T)|\|_s$ soit égale à $\sqrt{n}$ (pour tout nombre réel $s \geq 1$) dès que P est une loi de probabilité diffuse sur $\mathbb{R}$, c'est à dire dès que $P(A)$ est nul pour tout A fini.

Quatrième Partie

Soit X un ensemble muni de la tribu $\mathcal{B}$. Si $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$ est une famille de parties de X, et si A est une partie finie de X, on note $\mathcal{V} \cap A$ l'ensemble des parties de A de la forme $V \cap A$ avec $V \in \mathcal{V}$; on dit que A est *pulvérisée* par $\mathcal{V}$ si $\mathcal{V} \cap A$ est l'ensemble de toutes les parties de A; on note $\mathrm{Dim}(\mathcal{V})$ la borne supérieure de $\#(A)$, pour les $A \subset X$ pulvérisés par $\mathcal{V}$.

On se propose de montrer que, si $\mathrm{Dim}(\mathcal{V}) = D$, alors, pour tout $\beta > D$, il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $\mathcal{V}$ ait la propriété $VC(c, \beta)$.

Cela permettrait d'appliquer à $\mathcal{V}$ les résultats de la partie III.

1. Soit A une partie finie de X avec $\#(A) = n$.

(a) Soit $\mathcal{T}$ un ensemble de parties de A. Pour chaque $T \in \mathcal{T}$ et chaque $a \in A$, on pose $T_a^{\mathcal{T}} = T \setminus \{a\}$ si $T \setminus \{a\} \notin \mathcal{T}$, et $T_a^{\mathcal{T}} = T$ sinon. On note $\mathcal{T}_a$ l'ensemble des $T_a^{\mathcal{T}}$ pour $T \in \mathcal{T}$. Montrer qu'on a:

$$\#(\mathcal{T}_a) = \#(\mathcal{T}) \text{ et } \mathrm{Dim}(\mathcal{T}_a) \leq \mathrm{Dim}(\mathcal{T}).$$

(b) Montrer qu'on peut construire un ensemble $\mathcal{U}$ de parties de A, avec:

$$\#(\mathcal{U}) = \#(\mathcal{T}) \text{ et } \mathrm{Dim}(\mathcal{U}) \leq \mathrm{Dim}(\mathcal{T}),$$
$$U_a^{\mathcal{U}} = U \text{ pour tout } U \in \mathcal{U} \text{ et tout } a \in A.$$

En déduire que chaque $U \in \mathcal{U}$ est de cardinal inférieur ou égal à $\mathrm{Dim}(\mathcal{U})$.

(c) Soit $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$ une famille de parties de X, avec $\mathrm{Dim}(\mathcal{V}) = D$. En appliquant (b) à $\mathcal{T} = \mathcal{V} \cap A$, montrer l'inégalité suivante:

$$\#(\mathcal{V} \cap A) \leq \sum_{i=1}^{D} \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

2. Montrer que, pour tout $n \geq D$,

$$\sum_{i=1}^{D} \frac{n!}{i!(n-i)!} \text{ est majoré par } (en/D)^D.$$

Si $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$ est une famille de parties de X, avec $\mathrm{Dim}(\mathcal{V}) = D$, en déduire qu'il existe C fini tel qu'on ait:

$$\#(\mathcal{V} \cap A) \leq C(\#(A))^D \text{ pour tout } A \text{ fini inclus dans } X.$$

3. Soient $X_1, \cdots, X_n$ des v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $(X, \mathcal{B})$ indépendantes et de loi Q. Montrer qu'on a, pour tout $V, T \in \mathcal{B}$:

$$\mathbb{P}(\{X_1, \cdots, X_n\} \cap V = \{X_1, \cdots, X_n\} \cap T) \leq \exp(-n d_Q(V, T)).$$

En déduire que, si $\mathcal{V}$ est une partie de $\mathcal{B}$ avec $\mathrm{Dim}(\mathcal{V}) = D < +\infty$ et si $V_1, \cdots, V_N$ sont des éléments distincts de $\mathcal{V}$ vérifiant

$$\sum_{i,j,i \neq j} \exp(-n d_Q(V_i, V_j)) < 1,$$

alors N est inférieur ou égal à Cn^D.

4. Soit $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$ une famille de parties de X, avec $\mathrm{Dim}(\mathcal{V}) = D < +\infty$.
On se donne $\beta > D$, $\varepsilon \in]0, 1]$ et une loi de probabilité Q sur $(X, \mathcal{B})$. Soient $V_1, \cdots, V_N$ $(N \geq 2)$ des éléments de $\mathcal{V}$ avec $d_Q(V_i, V_j) > \varepsilon$ pour tous i,j distincts.
Montrer qu'il est possible de choisir $c \geq 1$ tel que l'on ait

$$C(4\ln(N))^D \leq c^{D/\beta}\, N^{1-(D/\beta)} \text{ pour tout } N \geq 2.$$

Montrer qu'alors N est inférieur ou égal à $c\varepsilon^{-\beta}$
(pour cela prendre pour n le plus petit entier $> (2/\varepsilon)\ln(N)$).
En déduire que $\mathcal{V}$ a la propriété $VC(c, \beta)$.

5. On appelle demi-espace affine dans $\mathbb{R}^2$, toute partie de la forme
$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 x_1 + u_2 x_2 > v\}$ (avec u_1, u_2 et v dans $\mathbb{R}$).
Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des demi-espaces affines dans $\mathbb{R}^2$.
Montrer que $\mathrm{Dim}(\mathcal{V})$ est égale à 3.

6. Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble de toutes les parties convexes de $\mathbb{R}^2$.
Montrer que $\mathrm{Dim}(\mathcal{V})$ est infinie.

MATHÉMATIQUES DE L'INFORMATIQUE

Le but du problème est d'étudier des codes correcteurs d'erreurs. Ils sont utilisés pour rendre plus fiables les transmissions numériques en permettant de détecter et de corriger certaines erreurs.

I. Notations et définitions

Étant donné un ensemble E, on notera $|E|$ le nombre de ses éléments.

On notera $\mathbb{F}_q$ le corps à q éléments, où q est une puissance d'un nombre premier p et $\mathbb{F}_q^*$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{F}_q$. On écrira les éléments de $\mathbb{F}_2$: 0, 1 sans distinction avec les nombres entiers naturels.

On appelle *mots* de longueur n les éléments de l'espace vectoriel $(\mathbb{F}_q)^n$. On les notera sous la forme de vecteurs ligne $(x_1, \ldots, x_n)$ ou $(x_0, \ldots, x_{n-1})$ selon le contexte.

À tout $x = (x_1, \ldots, x_m)$ dans $(\mathbb{F}_2)^m$ on fait correspondre le nombre entier $N_m(x)$ dont les x_i sont les composantes du développement binaire

$$N_m(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i 2^{i-1}.$$

Ainsi N_m est une bijection de $(\mathbb{F}_2)^m$ sur $\{0, 1, \ldots, 2^m - 1\}$. On désigne par M_m l'application réciproque de N_m.

On identifiera un polynôme avec la famille finie de ses coefficients.

Définition. *Un code C de longueur n sur le corps $\mathbb{F}_q$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{F}_q)^n$. Les éléments de C sont appelés mots du code. La dimension du code est sa dimension comme sous-espace vectoriel.*

Une *matrice génératrice* d'un code C de longueur n et de dimension k est une matrice à k lignes et n colonnes dont les lignes engendrent le code. Si G est une matrice génératrice d'un code C de longueur n et de dimension k, l'application qui à un mot a de $(\mathbb{F}_q)^k$ fait correspondre le mot aG dans $(\mathbb{F}_q)^n$ est dite *application d'encodage*. On dit que la matrice génératrice G est *de forme canonique* si elle s'écrit par blocs : $G = \left(I_k \ \vdots \ P\right)$ où I_k est la matrice unité de rang k et P est une matrice à k lignes et $n - k$ colonnes.

Une *matrice de contrôle* H est une matrice à $n - k$ lignes et n colonnes telle qu'un mot c soit dans C si et seulement si $H\,c^\top = 0$ en notant $c^\top$ la transposée de la matrice ligne c.

Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sont deux mots, on note

$$d(x, y) = |\{i \mid x_i \neq y_i\}|$$

et on l'appelle la *distance* de x et y. On note $d(x, C)$ la plus petite distance du mot x aux mots de C. La *distance minimale* d_C du code C est

$$d_C = \inf\{d(x, y) \mid x \in C, y \in C, x \neq y\}.$$

Deux codes C_1 et C_2 sont dits *équivalents* s'il existe une permutation σ de $\{0, \ldots, n-1\}$ telle que

$$(c_0, \ldots, c_{n-1}) \in C_1 \iff (c_{\sigma(0)}, \ldots, c_{\sigma(n-1)}) \in C_2.$$

II. Préliminaires

Soit C un code de longueur n, de dimension k et de distance minimale d_C. Soit G une matrice génératrice de ce code et H une matrice de contrôle.

1) Quelle est l'image de l'application d'encodage ?

2) Montrer que si $d_C \geq 2t + 1$, alors pour tout mot y de $(\mathbb{F}_q)^n$ tel que $d(y, C) \leq t$, il existe un unique mot de C à distance minimale de y.
Dans ce cas, on dira que le code C *corrige t erreurs*.

3) Montrer que le code a une distance minimale $d_C = s + 1$ si et seulement si s colonnes quelconques de H sont linéairement indépendantes et s'il existe $s + 1$ colonnes de H liées.

4) Montrer que $d_C \leq n - k + 1$.

5) Montrer que C est équivalent à un code ayant une matrice génératrice sous forme canonique.

6) La matrice génératrice $G = \left(I_k \ \vdots \ P\right)$ du code C étant supposée de forme canonique, montrer qu'il existe une matrice de contrôle H s'écrivant sous forme de blocs $H = \left(H_1 \ \vdots \ I_{n-k}\right)$. Exprimer H_1 en fonction de P.

III. Codes de Hamming

Soit $q = 2$ et $n = 2^m - 1$.
Soit H_m la matrice à m lignes et n colonnes telle que

$$H_m = (h_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}, \quad \text{avec } M_m(j) = (h_{1,j}, \ldots, h_{m,j})$$

où la fonction M_m a la signification donnée au chapitre I.
On définit le code C_m comme étant l'ensemble des $c \in (\mathbb{F}_2)^n$ tels que $H_m \cdot c^\top = 0$.

1) Déterminer la longueur, la dimension et la distance minimale du code C_m. Montrer que H_m est une matrice de contrôle.

2) Soit x un mot quelconque de $(\mathbb{F}_2)^n$.

a) Montrer que les boules fermées de rayon 1 centrées aux points de C_m forment une partition de $(\mathbb{F}_2)^n$. En déduire $d(x, C_m)$.

b) Montrer qu'il existe un unique mot de code à distance minimale de x. Décrire un algorithme donnant ce mot de code.

3) *Application numérique*
Soit $m = 3$. Trouver le mot de code à distance minimale de $x = (1,1,1,1,0,0,0)$.

IV. Transformation d'Hadamard

1) Produits de Kronecker

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$ dont on note $a_{i,j}$ les coefficients supposés dans un anneau commutatif ($a_{i,j}$ est l'élément qui se trouve à la ligne i et à la colonne j) et B une matrice carrée de taille $m \times m$ dont on note $b_{i,j}$ les coefficients. On définit la matrice $A \otimes B$ comme étant la matrice carrée de taille $mn \times mn$ obtenue en remplaçant dans la matrice A le coefficient $a_{i,j}$ par le bloc matriciel $a_{i,j}B$.

a) Donner un algorithme permettant de calculer les coefficients de la matrice $A \otimes B$ en fonction des coefficients de A et de B.

b) Vérifier que si A, B, C sont des matrices carrées alors

$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C.$$

On pourra donc noter $A \otimes B \otimes C$ l'une de ces matrices.
On admettra que si A et B sont des matrices carrées de même taille et si C est une matrice carrée alors

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$$

et que si A et C d'une part, B et D d'autre part sont des matrices carrées de même taille alors

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD).$$

2) Fonctions définies sur $(\mathbb{F}_2)^m$

Soit m un entier ≥ 1. Notons $\mathcal{F}(m)$ l'espace vectoriel sur le corps des complexes $\mathbb{C}$ des fonctions définies sur $(\mathbb{F}_2)^m$ à valeurs complexes. On définit la fonction $\varphi_i \in \mathcal{F}(m)$ par

$$\varphi_i(\tau) = \begin{cases} 1 \text{ si } \tau = M_m(i) \\ 0 \text{ si } \tau \neq M_m(i) \end{cases}$$

Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\varphi_i)_{0 \leq i \leq 2^m - 1}$ est une base de $\mathcal{F}(m)$ et donner les composantes d'une fonction $f \in \mathcal{F}(m)$ dans cette base.

3) Transformation d'Hadamard

Si $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m)$ et $\tau = (\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_m)$ sont deux éléments de $(\mathbb{F}_2)^m$ on définit dans $\mathbb{F}_2$

$$< \omega, \tau >= \sum_{k=1}^{m} \omega_k \tau_k.$$

A toute fonction f de $\mathcal{F}(m)$ on associe la fonction $h_{2^m}(f)$ de $\mathcal{F}(m)$ définie par

$$h_{2^m}(f)(\tau) = \sum_{\omega \in (\mathbb{F}_2)^m} (-1)^{<\omega,\tau>} f(\omega).$$

Ainsi h_{2^m} définit un opérateur linéaire sur $\mathcal{F}(m)$.

a) Calculer $h_{2^m} \circ h_{2^m}$. Montrer que h_{2^m} est inversible et calculer $h_{2^m}^{-1}$.

On note H_{2^m} la matrice de h_{2^m} dans la base $\mathcal{B}$.

b) Calculer H_2.

c) Montrer que pour tout $m \geq 2$

$$H_{2^m} = H_2 \otimes H_{2^{m-1}}.$$

d) Montrer que

$$H_{2^m} = Q_{2^m}^{(1)} Q_{2^m}^{(2)} \cdots Q_{2^m}^{(m)}$$

où

$$Q_{2^m}^{(k)} = I_{2^{m-k}} \otimes H_2 \otimes I_{2^{k-1}}$$

(I_s est la matrice unité de taille s).

e) Si g est un vecteur colonne à 2^m composantes complexes, calculer les composantes de $Q_{2^m}^{(k)} g$ (où $1 \leq k \leq m$) en fonction des composantes de g.

f) A la lumière des deux questions d) et e) précédentes, donner un algorithme permettant de trouver les composantes de $h_{2^m}(f)$ en fonction de celles de f. Indiquer les opérations dans $\mathbb{C}$ utilisées par cet algorithme ainsi que leur nombre.

g) Montrer qu'on a aussi

$$H_{2^m} = Q_{2^m}^{(m)} Q_{2^m}^{(m-1)} \cdots Q_{2^m}^{(1)}.$$

V. Codes de Reed-Muller d'ordre 1 sur $\mathbb{F}_2$

1) Définition et paramètres du code

Soit E l'espace des polynômes en m variables ($m \geq 1$) à coefficients dans le corps à deux éléments $\mathbb{F}_2$, de degré total ≤ 1. Cet espace E est de dimension $m+1$ et tout élément u de E s'écrit sous la forme

$$u(X) = u(X_1, X_2, \cdots, X_m) = u_0 + u_1 X_1 + u_2 X_2 + \cdots + u_m X_m$$

ou encore en considérant ses composantes sur la base des monômes $u = (u_0, u_1, \cdots, u_m)$.

Soit ψ l'application de E dans $(\mathbb{F}_2)^{2^m}$ définie par $\psi(u) = \Big(u(\omega)\Big)_{0 \leq N_m(\omega) \leq 2^m - 1}$,

cette écriture signifiant que les $u(\omega)$ sont rangés dans l'ordre des $N_m(\omega)$ croissants.

a) Montrer que ψ est une application linéaire injective.

Soit $C = \psi(E)$. Le sous espace C de l'espace $(\mathbb{F}_2)^{2^m}$ muni de sa base habituelle donne ainsi un code de longueur 2^m et de dimension $m+1$.

b) Quelle est la distance minimale du code C ? (On pourra raisonner par récurrence sur le nombre m de variables booléennes utilisées).

2) Décodage

Soit $f = (f_0, \ldots, f_{2^m-1})$ un mot quelconque de $(\mathbb{F}_2)^{2^m}$. On se propose de déterminer le mot de code (l'élément de C) le plus proche de f au sens de la distance d sur $(\mathbb{F}_2)^{2^m}$. Pour cela soit F la fonction de $(\mathbb{F}_2)^m$ dans $\mathbb{C}$ définie par $F(\omega) = (-1)^{f_{N_m(\omega)}}$.

a) Soit $\tau \in \mathbb{F}_{2^m}$. Montrer que

$$h_{2^m}(F)(\tau)$$

est égal au nombre de composantes 0 diminué du nombre de composantes 1 dans le vecteur binaire

$$\Big(f_{N_m(\omega)} - \sum_{i=1}^{m} \tau_i \omega_i\Big)_{0 \le N_m(\omega) \le 2^m - 1}$$

où les ω_i sont les composantes de ω.

b) Montrer que

$$d\Big(f, \psi(\sum_{i=1}^{m} \tau_i X_i)\Big) = \frac{1}{2}\Big(2^m - h_{2^m}(F)(\tau)\Big)$$

et que $$d\Big(f, \psi(1 + \sum_{i=1}^{m} \tau_i X_i)\Big) = \frac{1}{2}\Big(2^m + h_{2^m}(F)(\tau)\Big).$$

c) En déduire un algorithme calculant $u = (u_0, u_1, \cdots, u_m)$ de telle sorte que $\psi(u)$ soit un mot de code à distance minimale de f.

d) *Application numérique*

Soit $m = 3$. Trouver un mot de code à distance minimale de $(1,1,0,1,0,0,1,1)$ et montrer qu'il est unique.

VI. Codes cycliques

Notons $\mathcal{S}$ l'application de $(\mathbb{F}_q)^n$ dans lui-même qui effectue la permutation circulaire

$$(c_0, c_1, \ldots, c_{n-2}, c_{n-1}) \longmapsto (c_{n-1}, c_0, \ldots, c_{n-3}, c_{n-2}).$$

Un code C est dit *cyclique* si c'est un sous-espace de $(\mathbb{F}_q)^n$ invariant par $\mathcal{S}$.

Si f est un polynôme dans $\mathbb{F}_q[z]$, on note $\overline{f}$ sa classe dans $\mathbb{F}_q[z]/(z^n - 1)$.

Soit $c = (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ un mot de $(\mathbb{F}_q)^n$ (considéré ici comme un polynôme de $\mathbb{F}_q[z]$ de degré $\le n-1$). On lui associe sa classe $\overline{c}$ dans $\mathbb{F}_q[z]/(z^n - 1)$.

1) Montrer que l'ensemble $\overline{C}$ des $\overline{c}$ où $c \in C$ est un idéal de l'anneau quotient $\mathbb{F}_q[z]/(z^n - 1)$ si et seulement si le code C est cyclique.

2) Soit C un code cyclique de dimension k.

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme g de $\mathbb{F}_q[z]$ de plus bas degré tel que $\overline{g} \in \overline{C}$ et dont le coefficient du terme de plus haut degré soit égal à 1.

b) Montrer que tous les éléments de $\overline{C}$ s'écrivent sous la forme $\overline{fg}$ où f parcourt $\mathbb{F}_q[z]$.

On dira que g est le *polynôme générateur* du code C.

c) Montrer que g est un diviseur de $z^n - 1$.

d) Quel est le degré de g ?

3) On note $\phi(n)$ le nombre de générateurs d'un groupe cyclique d'ordre n.

a) Etant donné n, calculer $\displaystyle\sum_{d \text{ divise } n} \phi(d)$.

b) Montrer que le groupe $\mathbb{F}_{q^m}^*$ est cyclique.

Soit α un générateur du groupe $\mathbb{F}_{q^m}^*$.

4) Soit C un code cyclique de polynôme générateur g. Supposons que

$$g(\alpha^i) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq \delta - 2.$$

Montrer que le code C est de distance minimale au moins égale à δ.

VII. Codes de Reed-Muller

Étant donné des ensembles A et B on note $\mathcal{A}(A, B)$ l'ensemble des applications de A dans B.

1) Soit Φ l'application linéaire

$$\Phi : \mathbb{F}_q[X_1, \ldots, X_m] \longrightarrow \mathcal{A}((\mathbb{F}_q)^m, \mathbb{F}_q)$$

qui associe au polynôme $f(X_1, \ldots, X_m)$ la fonction

$$\begin{array}{rccc} \Phi(f) : & (\mathbb{F}_q)^m & \longrightarrow & \mathbb{F}_q \\ & (a_1, \ldots, a_m) & \longmapsto & f(a_1, \ldots, a_m). \end{array}$$

Déterminer un polynôme dont les degrés partiels sont strictement inférieurs à q en les variables X_i et dont l'image par Φ est la fonction caractéristique d'un point donné.

2) Déterminer l'image et le noyau de Φ.

3) Soit $\mathbb{F}_q[X_1, \ldots, X_m]_\nu$ l'ensemble des polynômes f de degrés partiels $< q$, de degré total $\leq \nu$.

a) Pour quelles valeurs de ν l'application

$$\Phi_\nu : \mathbb{F}_q[X_1, \ldots, X_m]_\nu \longrightarrow \mathcal{A}((\mathbb{F}_q)^m, \mathbb{F}_q)$$

où Φ_ν est la restriction de Φ à $\mathbb{F}_q[X_1, \ldots, X_m]_\nu$, est elle injective, surjective, bijective ?

b) Même question avec

$$\Phi_\nu^* : \mathbb{F}_q[X_1, \ldots, X_m]_\nu \longrightarrow \mathcal{A}((\mathbb{F}_q)^m - \{0\}, \mathbb{F}_q)$$

où $\Phi_\nu^*(f)$ est la restriction de $\Phi_\nu(f)$ à $(\mathbb{F}_q)^m - \{0\}$.
On suppose dorénavant que $n = q^m - 1$.

4) Montrer que l'on a un isomorphisme d'espaces vectoriels sur $\mathbb{F}_q$:

$$\theta : \mathbb{F}_{q^m} \longrightarrow (\mathbb{F}_q)^m.$$

5) On rappelle que α est un générateur du groupe cyclique $\mathbb{F}_{q^m}^*$. On indexe les éléments de $(\mathbb{F}_q)^m - \{0\}$ par

$$\omega_i = \theta(\alpha^i) \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq n - 1.$$

On définit le code $C_\nu(m, q)$ comme l'image de $\mathbb{F}_q[X_1, \ldots, X_m]_\nu$ dans $\mathcal{A}((\mathbb{F}_q)^m - \{0\}, \mathbb{F}_q)$ par l'application Φ_ν^*.
Un mot c_f de $C_\nu(m, q)$ est donc de la forme

$$c_f : (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}) \longmapsto \big(f(\omega_0), f(\omega_1), \ldots, f(\omega_{n-1})\big).$$

Montrer que $C_\nu(m, q)$ est un code cyclique.